TEMAS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO
➢ ECUACI0NES DIFERENCIALES

INDICE

Profesor Juan Carlos Serruya
Matemática y Astronomía

2009

MATEMÁTICA:

Tenemos lo siguiente:

1 + 1 = 2 esto es
- una cuenta (operación)
- adición
- igualdad (como relación)

3 + x = 7 esto es
- operación
- adición
- igualdad (con un número desconocido)

$\Downarrow$

Ecuación Algebraica

Ecuación Algebraica: igualdad en la cual figuran números o cantidades desconocidas.

Este año veremos otro tipo de ecuaciones. Sean $f_{(x)} = x$ y $g_{(x)} = 2x$:

$f_{(x)} = x$ $\qquad$ $g_{(x)} = 2\ x$

$\boxed{f'_{(x)} = 1}$ $\leftarrow$ derivando $\rightarrow$ $\boxed{g'_{(x)} = 2}$

Reemplazando $\rightarrow$ $\boxed{g_{(x)} = g'_{(x)} x}$

Hemos obtenido en cada caso una Ecuación Diferencial

En las ecuaciones las incógnitas son
- x $\rightarrow$ número (Ecuaciones algebraicas)
- $g_{(x)}$, $f_{(x)}$ $\rightarrow$ Funciones (Ecuaciones diferenciales)

Definición:

Se llaman Ecuaciones Diferenciales a las ecuaciones que contienen variables, derivadas o diferenciales de una función incógnita, y **ninguna constante arbitraria**.

Una Ecuación Diferencial es una propiedad física escrita en términos matemáticos.

También puede escribirse o interpretarse:

$F(\vec{x}, y, y' \ldots y^n) = 0$ ED

$\vec{x} = (x_1, x_2 \ldots x_n)$ Variable independiente

$y = f_{(x)}$ Solución

Definición:

Primitiva de $f_{(x)}$ es una función y tal que $y' = f_{(x)}$

$$\frac{dy}{dx} = f_{(x)}$$

$$dy = f_{(x)} \cdot dx$$

$$\int dy + K = \int f_{(x)} \cdot dx + C$$

Agrupando las constantes:

$$\int dy = \int f_{(x)} \cdot dx + C$$

$$y = \int f_{(x)} \cdot dx + C$$

$\boxed{y = \Theta_{(x)} + C}$ Solución General

Para cada valor asignado a la constante arbitraria C se obtiene una solución particular de la ecuación dada.

- Clasificación de E. D.

1) E. D. ordinarias, cuando la función incógnita es de una sola variable (puede ser o no derivadas sucesivas)

$$y = f_{(x)}$$

2) E. D. a con en derivadas parciales, cuando la función incógnita es de varias variables.

$$z = f_{(x,y...l)}$$

- Orden y grado

Orden: se llama orden de una ED al orden de la derivada de mayor orden que en ella figura.

$$f\left(x, y, y', y''...\underset{\uparrow}{y^{(n)}}\right) = 0$$

Ejemplos: Orden

$y' + y'' + 1 = y'''$	3
$(y'')^3 + (y''')^2 - \ln x = 5$	3
$y^v - y' = y^2$	5
$y = 2x + \cos x$	~~ED~~: No es ED. No tiene derivada
	NO se dice "orden cero" no tiene sentido.

Grado: se llama grado de una ED al exponente de la derivada de mayor orden que en ella figura, luego de haber expresado la ED en forma polinómica respecto de la variable dependiente y su respectiva derivada.

$$\sqrt[3]{y'+1} = y'' \quad \rightarrow \quad y' + 1 = (y'')^3 \longrightarrow \text{Orden 2, Grado 3}$$

$$\frac{1}{y'' + y} = y' \quad \rightarrow \quad 1 = y'(y'' + y) \quad \rightarrow \quad 1 = y'y'' + y'y \longrightarrow \text{Orden 2, Grado 1}$$

Solución:

Resolver o integrar una E. D. es encontrar la o las funciones que la verifican. Generalmente las soluciones son infinitas.

Hay tres tipos de Solución:

a) Solución o integral general SG
b) Solución o integral Particular SP
c) Solución o integral Singular SS

- Las ED pueden clasificarse en:

→ polinomiales
→ no polinomiales

Y según sus coeficientes:

→ coeficientes constantes $a\,y' + 2\,y = 3$ (en este caso a es una constante desconocida)
→ coeficientes variables $3\,x^2\,y + 3\,y = 0$

- Dada la ED de 1^er orden en forma implícita

$$\Psi(x, y, y') = 0$$

Si es posible despejar y', se lleva la expresión dada anteriormente a la forma normal o explícita:

$$y' = \Psi(x, y)$$

$\Psi(x, y)$ es una función uniforme definida en un dominio $\mathbb{R}$ de las variables x e y.

- La ecuación diferencial $y' = \Psi(x, y)$ asocia a cada punto del plano de coordenadas $P(x_0, y_0)$ con la pendiente de coeficiente angular $m_0 = \Psi(x_0, y_0)$ es decir la curva integral que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$ tiene tangente cuya pendiente angular es el valor que toma la función en el punto P.

- E. D. Tipo: variables separables

Sea: $M_{1(x)} N_{1(y)} dx + M_{2(x)} N_{2(y)} dy = 0$ ①

Haciendo Álgebra: $M_{1(x)} N_{1(y)} dx = -M_{2(x)} N_{2(y)} dy$

$$\frac{M_{1(X)}}{M_{2(X)}} dx = -\frac{N_{2(Y)}}{N_{1(Y)}} dy$$

Integrando: $\int \frac{M_1}{M_2}(x) \cancel{dx} + K = -\int \frac{N_2}{N_1}(y) dy + C$ ② (una constante absorbe la otra)

Llamando: $\frac{M_1}{M_2}(x) = \mu_{1(x)}$ ③ $\wedge$ $\frac{N_2}{N_1}(y) = \mu_{2(y)}$ ④

Reemplazando ③ ∧ ④ en ②, integrando y haciendo cuadratura:

$$\boxed{\int \mu_{1(x)} dx = -\int \mu_{2(y)} dy + C \Rightarrow \Psi_{(x)} = \Theta_{(y)} + C}$$ Solución General.

Ejemplo 1: $(y^2-1)dx - (2y + xy)dy = 0$ ①

Efectuando pasaje de términos: $(y^2-1)dx = (2y+xy)dy$

Sacando factor común y en el segundo miembro: $(y^2-1)dx = y(2+x)dy$

Agrupando convenientemente: $\frac{dx}{2+x} = \frac{y}{y^2-1} dy$ ②

Integrando ②: $\int \frac{dx}{2+x} + C = \int \frac{y}{y^2-1} dy$ ③

Sea: $u = y^2 - 1$ ④ $\Rightarrow$ $du = 2y \cdot dy$ $\Rightarrow$ $\frac{du}{2y} = dy$ ⑤

Reemplazando ④ ∧ ⑤ en el segundo miembro de ③:

$$\int \frac{y}{y^2-1} dy = \int \frac{y}{u} \cdot \frac{du}{2y} = \int \frac{ydu}{2uy} = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2 \cdot \ln u} = \frac{1}{2}\ln(y^2-1)$$

Haciendo cuadratura en el primer miembro de ③: $\int \frac{dx}{2+x} = \ln(2+x)$

Haciendo: $C = \ln K$

La ecuación ③ queda: $\ln(2+x) + \ln K = \frac{1}{2}\ln(y^2-1)$

Entonces $\frac{1}{2}\ln(y^2-1) - \ln(2+x) = \ln K$ $\Rightarrow$ $\ln\sqrt{(y^2-1)} - \ln(2+x) = \ln K$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\ln\frac{\sqrt{(y^2-1)}}{(2+x)} = \ln K$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\sqrt{(y^2-1)}}{(2+x)} = K}$ ⇦ Esta expresión es solución de la ecuación diferencial

Elevando al cuadrado: $\frac{(y^2-1)}{(2+x)^2} = K^2$ $\Rightarrow$ $\frac{(y^2-1)}{(2+x)^2} = C$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = \pm\sqrt{C(2+x)^2 + 1}}$

Forma explícita en y ↑

o Función Homogénea

Dada una función z=f (x, y,…*l*) se dice que la misma es una función homogénea de grado k / k $\in \mathbb{R}$ cuando al sustituir cada variable por la misma variable multiplicada por λ se obtiene como respuesta el producto de dos factores donde uno de ellos es λ^k y el otro la f inicial.

z=f (x, y,…*l*) es una función homogénea de grado k / k $\in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x\lambda, y\lambda, \ldots l\lambda) = \lambda^k\ f(x, y, \ldots l)$
(k grado de homogeneidad)

▪ Ecuaciones Diferenciales de 1er orden Tipo HOMOGÉNEAS

Sea la E D: $P_{(x,y)}\,dx + Q_{(x,y)}\,dy = 0$ ① / $P \wedge Q$ funciones homogéneas de igual grado

$\Rightarrow$ ① es E D homogénea $\therefore$ se cumple: $y = mx$ ② $\rightarrow$ $dy = dm.x + m.dx$ ③

Reemplazando ② $\wedge$ ③ en ①:

$$P_{(x,\,mx)}\,dx + Q_{(x,\,mx)}\,(dm.x + m.dx) = 0$$

Al ser $P \wedge Q$ funciones homogéneas:

$$x^k\,P_{(1,\,m)}\,dx + x^k\ Q_{(1,\,m)}\,(x\,.\,dm + m.dx) = 0$$

Cancelando y ordenando:

$$\left(P_{(1,\,m)} + m\,Q_{(1,\,m)}\right)dx + x\,.\,Q_{(1,\,m)}\,dm = 0$$

Luego:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{Q_{(1,m)}dm}{P_{(1,m)} + mQ_{(1,m)}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ln x = -\int \frac{Q_{(1,m)}dm}{P_{(1,m)} + m.Q_{(1,m)}}}$$ E. D. de Variables Separables

Acomodando un poco más:

$$x = e^{-\int \frac{Q_{(1,m)}dm}{P_{(1,m)}+m.Q_{(1,m)}} + \ln \tilde{N}} \quad \Rightarrow \quad x = e^{\tilde{N}} \cdot e^{-\int \frac{Q_{(1,m)}dm}{P_{(1,m)}+m.Q_{(1,m)}}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = C \cdot e^{-\int \frac{Q_{(1,m)}dm}{P_{(1,m)}+m.Q_{(1,m)}}}}$$ E. D. de Variables Separables

- Ecuaciones que pueden ser llevadas a homogéneas:

Dada la ecuación diferencial del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = \Psi\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \qquad ①$$

se considera en éste caso el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} a_1\, x + b_1\, y + c_1 = 0 \\ a_2\, x + b_2\, y + c_2 = 0 \end{cases} \qquad ②$$

el cual representa en el plano un par de rectas.

Estas rectas pueden:

- a) ser coincidentes
- b) cortarse en un punto
- c) ser para1e1as

Caso a) Rectas coincidentes: Si 1as rectas son coincidentes significa que los coeficientes de las variables y los términos independientes son proporcionales, por tanto:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \lambda \qquad \text{(constante de proporcionalidad)}$$

Este sistema ② es indeterminado, y el determinante del mismo es igual a cero.
Podemos expresar la ecuación original

$$\frac{dy}{dx} = \Psi\left(\frac{\lambda a_2 x + \lambda b_2 y + \lambda c_2}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

Sacando factor común λ, tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \Psi\left(\lambda\left(\frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \Psi(\lambda(1)) = K$$

O sea $\frac{dy}{dx} = K$

Luego la solución será: $dy = K\, dx$

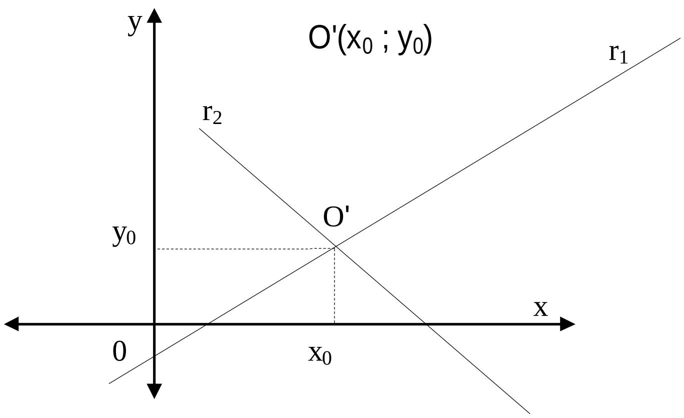
Integrando: $\int dy = K \int dx$

Por cuadratura: $y = K\, x + C$

Caso b) Rectas incidentes: Si las rectas dadas por el sistema ② se cortan en un punto éste sistema es determinado. Por tanto, el determinante del sistema es distinto de cero

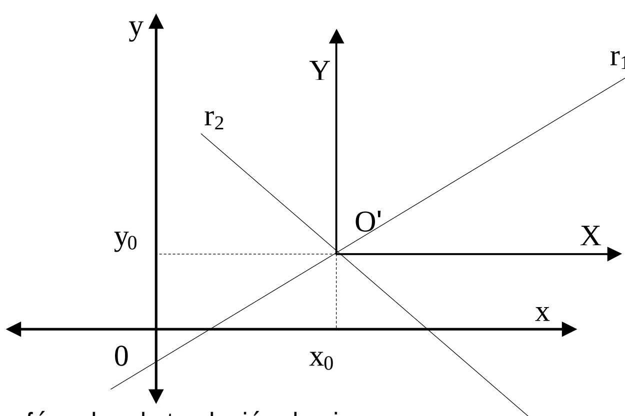
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Las rectas se cortan en un punto qué llamamos O'



$$x_0 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad y_0 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}$$

La transformación de coordenadas por traslación de los ejes al punto de intersección de las rectas está dada por:



Utilizando las fórmulas de traslación de ejes

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

Entonces las ecuaciones dadas en el sistema:

$$\begin{cases} a_1\ x + b_1\ y + c_1 = 0 \\ a_2\ x + b_2\ y + c_2 = 0 \end{cases} \qquad ②$$

...tendrán en el sistema trasladado la siguiente expresión:

$$\begin{cases} a_1\ (X + x_0) + b_1\ (Y + y_0) + c_1 = 0 \\ a_2\ (X + x_0) + b_2\ (Y + y_0) + c_2 = 0 \end{cases}$$

o sea que:

$$a_1 X + b_1 Y + \underbrace{a_1\, x_0 + b_1\, y_0 + c_1}_{} = a_1\, X + b_1 Y$$

$$a_1\, x_0 + b_1\, y_0 + c_1 = 0 \qquad \text{por ②}$$

también

$$a_2 X + \underbrace{b_2 Y + a_2\, x_0 + b_2\, y_0}_{} + c_2 = a_2\, X + b_2 Y$$

$$a_2\, x_0 + b_2\, y_0 + c_2 = 0 \qquad \text{por ②}$$

Por otra parte: $dx = d(X + x_0) = dX$

$dy = d(Y + y_0) = dY$

Por lo tanto, y en función de lo expuesto podemos replantear el sistema ① de la siguiente forma:

$$\frac{dY}{dX} = \Psi\left(\frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}\right) \qquad ③$$

y en la expresión ③ se tiene una ecuación homogénea en las nuevas variables X e Y; y mediante la sustitución

$\frac{Y}{X} = M$ se separan las variables y se tiene que: $Y = X \cdot M$ ④

derivando ④: $$\frac{dY}{dX} = M + X\frac{dM}{dX} \qquad ⑤$$

Reemplazando ④ y ⑤ en ③ se tiene: $M + X\frac{dM}{dX} = \Psi\left(\frac{a_1 X + b_1 XM}{a_2 X + b_2 XM}\right)$

Entonces: $$X\frac{dM}{dX} = \Psi\left(\frac{a_1 + b_1 M}{a_2 + b_2 M}\right) - M$$

Llamando $H_{(M)} = \Psi\left(\frac{a_1 + b_1 M}{a_2 + b_2 M}\right) - M$, se tiene: $X\frac{dM}{dX} = H_{(M)}$

separando variables $\frac{dM}{H_{(M)}} = \frac{dX}{X}$ que al integrar nos queda:

$$\int \frac{dM}{H_{(M)}} = \int \frac{dX}{X} + C$$ La cual es la solución de la E. D. dada.

Caso c) Rectas paralelas: Cuando las rectas son paralelas. El sistema es incompatible y es cuando los coeficientes de las variables son proporcionales, pero no lo son los elementos de los términos independientes

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\lambda \qquad \frac{c_1}{c_2}\neq\lambda$$

Dada la ecuación: $$\frac{dy}{dx}=\Psi\left(\frac{\lambda a_2x+\lambda b_2y+\lambda c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=H_{(M)} \quad ⑥$$

Significa esto que e1 2º miembro de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\Psi\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

…es función de la expresión a_2x+b_2y

Llamando: $M=a_2x+b_2y$

Se tiene entonces: $b_2y=M-a_2x$

Luego: $$y=\frac{1}{b_2}(M-a_2x) \quad ⑦$$

Diferenciando la expresión ⑦

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_2}\left(\frac{dM}{dx}-a_2\right) \quad ⑧$$

Sustituyendo ⑧ en ⑥ tenemos:

$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{dM}{dx}-a_2\right)=H_{(M)}$$

Operando: $$\frac{dM}{dx}-a_2=b_2H_{(M)}$$

$$\frac{dM}{dx}=b_2H_{(M)}+a_2 \quad ⑨$$

Llamando $$\Omega_{(M)}=b_2H_{(M)}+a_2 \quad ⑩$$

Reemplazando ⑩ en ⑨: $$\frac{dM}{dx}=\Omega_{(M)}$$

Separando variables: $$\frac{dM}{\Omega_{(M)}}=dx \quad ⑪$$

Integrando ⑪: $$\int\frac{dM}{\Omega_{(M)}}+K=\int dx$$

Y mediante cuadraturas se halla la solución de la ecuación diferencial dada

$$\boxed{x=\vartheta_{(M)}+K}$$

- Ecuaciones Diferenciales Tipo Lineal

Son de la forma: $y' + P_{(x)} y = Q_{(x)}$ ①

Si $Q_{(x)} = 0$ $\Rightarrow$ $y' + P_{(x)} y = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{y} = -P_{(x)} dx$ se pueden separar las variables

Si $Q_{(x)} \neq 0$

Hago $y = u \,.\, v$ ② (sustitución de Lagrange) y derivo $\Rightarrow$ $y' = u'v + uv'$ ③

Reemplazando ② y ③ en ① $\Rightarrow$ $u'v + u\underbrace{\left[v' + P_{(x)} v\right]}_{\text{Ecuación característica (la igualamos a cero)}} = Q_{(x)}$ ④

Si $v' + P_{(x)} v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -P_{(x)} v \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int P_{(x)} dx + C$

$\ln v = -\int P_{(x)} dx + K \Rightarrow \boxed{v = e^{-\int P_{(x)} dx + K}}$ ⑤

Reemplazando ⑤ en ④ $u[0] + u'e^{-\int P_{(x)} dx + K} = Q_{(x)} \Rightarrow \boxed{u'e^{-\int P_{(x)} dx + K} = Q_{(x)}}$

$\Rightarrow u' = Q_{(x)} e^{\int P_{(x)} dx - K} \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^{\int P_{(x)} dx - K} Q_{(x)} \Rightarrow$

$\boxed{\int du = \int e^{\int P_{(x)} dx - K} Q_{(x)} dx + C = u}$ ⑥ (en u puedo ignorar la constante K)

⑤ y ⑥ en ② $y =$ u . v

$$\boxed{y = \left[\int e^{\int P_{(x)} dx} Q_{(x)} dx + C\right] \cdot e^{-\int P_{(x)} dx + K}}$$ Solución General

En la práctica:

Foto: $\boxed{y' + P_{(x)} y = Q_{(x)}}$ cambio variable $y = u \,.\, v$

No hay Solución singular

Ecuación Diferencial tipo Bernoulli

Se llama ecuación de Bernoulli a la que resulta de multiplicar el segundo miembro de una ecuación lineal completa por la función incógnita elevada a una potencia **n**.

Sea la ecuación diferencial: $\boxed{y' + P_{(x)}\, y = Q_{(x)}\, y^n}$ ① $(n \in \mathbb{R})$

Si $n = 0$ → $y' + P_{(x)}y = Q_{(x)}$ E.D. Lineal (página 10)

Si $n = 1$ → $y' + P_{(x)}y = Q_{(x)}y$ E.D. Variables separables (página 4)

Si $n > 1$ E.D. típica de Bernoulli: $y' + P_{(x)}y = Q_{(x)}y^n$

Divido m. a m. por $\mathbf{y^n}$ y cambio de variable

$y'\,y^{-n} + P_{(x)}\, y^{1-n} = Q_{(x)}$ ②

cambio de variable $y^{1-n} = (1-n)\, z$ ③

derivo m. a m.: $(1-n)\, y^{1-n-1}\, y' = (1-n)\, z'$ ⇒ $y^{-n}\, y' = z'$ ④

Reemplazando ③ y ④ en ②: $\boxed{z' + P_{(x)}\,(1-n)\, z = Q_{(x)}}$ → E.D. TIPO Lineal

Hallado z se reemplaza en ③; obteniendo la solución de la ecuación dada.

$z = \Psi_{(x)}$ ⇒ $\boxed{y^{1-n} = (1-n)\cdot\Psi_{(x)}}$ SG de ①

Ecuación diferencial tipo Clairaut

FOTO $\boxed{xy' - y + f_{(y')} = 0}$ ①

Sustituyo $p = y'$ ②

y despejo y $y = xp + f_{(p)}$ ③

Derivo m. a m. respecto a x $\dfrac{dy}{dx} = p + x\dfrac{dp}{dx} + f'_{(p)}\dfrac{dp}{dx}$ ④

Luego $p = \dfrac{dy}{dx}$ ⑤

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + x\frac{dp}{dx} + f'_{(p)}\frac{dp}{dx} \Rightarrow 0 = x\frac{dp}{dx} + f'_{(p)}\frac{dp}{dx} \quad ⑥ \Rightarrow 0 = \left[x + f'_{(p)}\right]\frac{dp}{dx} \quad ⑦$$

- Solución 1: $\dfrac{dp}{dx} = 0$ ⑧ ⇒ $\boxed{p = C}$ ⑨

Reemplazando ⑨ en ③: $\boxed{y = cx + f_{(C)}}$ ⑩ Solución General, Familia de rectas.

- Solución 2: $\boxed{x = -f'_{(p)}}$ ⑪

Reemplazo ⑪ en ③: $y = -f'_{(p)}p + f_{(p)}$ $\boxed{y = f_{(p)} - f'_{(p)}p}$ Envolvente; Solución Singular

- E. D. tipo Ricatti

Responden a la expresión:

$y' + A_{(x)}\, y^2 + B_{(x)}\, y + C_{(x)} = 0$ ① / $A_{(x)}$ $B_{(x)}$ $C_{(x)}$ son funciones continuas

Sólo se resuelve si se conoce a p r i o r i: y_p Solución Particular.
No tiene Solución Singular.

Método:

Sea y_p ② una SP (satisface la ED)

$$y'_p + A_{(x)}\, y_p^2 + B_{(x)}\, y_p + C_{(x)} = 0$$

Para resolver la ED: $y' + A_{(x)}\, y^2 + B_{(x)}\, y + C_{(x)} = 0$ ①

Hago un cambio de variable: $y = y_p + z$ ③

$y' = y'_p + z'$ ④

Reemplazando ③ ^ ④ en ①: $y'_p + z' + A_{(x)}(y_p + z)^2 + B_{(x)}(y_p + z) + C_{(x)} = 0$

$$y'_p + z' + A_{(x)} y_p^2 + 2A_{(x)} y_p z + A_{(x)} z^2 + B_{(x)} y_p + B_{(x)} z + C_{(x)} = 0$$

$$\underbrace{\left[y'_p + A_{(x)} y_p^2 + B_{(x)} y_p + C_{(x)}\right]}_{=0} + z' + \left[2A_{(x)} y_p + B_{(x)}\right] \cdot z + A_{(x)} z^2 = 0 \qquad ⑤$$

= 0 pues y_p es solución de ①

La expresión ⑤ nos queda:

$z' + \left[2A_{(x)} y_p + B_{(x)}\right] \cdot z = -A_{(x)} z^2$ ⑥ ED tipo Bernoulli, incógnita z (ver página 11)

Una vez resuelta la ED de Bernoulli, se sustituye en ③ el valor de z obtenido en ⑥.
Obteniendo así la Solución General de la ED de Ricatti.

▪ Ecuaciones Diferenciales Exactas

> Se llama ecuación diferencial exacta aquella cuyo primer miembro es la diferencial total de una función igualada a cero.

Sea: $P_{(x;y)}dx + Q_{(x;y)}dy = 0$ ①

Para que sea una ecuación diferencial exacta se debe cumplir que exista una función $\boxed{\psi_{(x;y;C)}}$ ② donde C es una constante arbitraria.

Tal que la diferencial de ψ sea: $d\psi = P_{(x;y)}dx + Q_{(x;y)}dy = 0$ ③

En general, la diferencial de una función ψ es: $d\psi = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}dy = 0$ ④

Comparando ③ y ④: $P = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ ⑤ $Q = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$

Si se calcula la segunda derivada parcial pero en forma cruzada:

$P = \dfrac{\partial\psi}{\partial x} \Rightarrow \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ ⑥

$Q = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \Rightarrow \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ⑥

Comparando las expresiones ⑥, podemos ver que: $\boxed{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}}$ ⑦

y también: $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}}$ ⑧ Condición de simetría

Siendo éstas últimas condiciones (⑦ y ⑧) necesarias y suficientes para que una ecuación diferencial dada sea una diferencial exacta.

La solución de las ecuaciones diferenciales viene dada por: $\boxed{\psi = \int d\psi = \int P dx + \theta_{(y)}}$ ⑨

$\Theta_{(y)}$ es una función arbitraria, dependiente de y

(Esta función debe sumarse cuando se realiza la cuadratura de una integral; si la función a integrar fuera de variable única se sumaría una constante arbitraria)

- <u>Cálculo de $\Theta_{(y)}$:</u>

Derivando ⑨ en ***y***:

⑨ $\psi = \int d\psi = \int Pdx + \theta_{(y)}$ => $\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\left[\int Pdx + \theta_{(y)}\right]}{\partial y}$

La derivada de la suma es la suma de las derivadas: $\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int Pdx + \frac{\partial\theta_{(y)}}{\partial y}$ ⑩

Recordando ⑤: $Q = \frac{\partial\psi}{\partial y}$

Reemplazando ⑤ en ⑩: $Q = \frac{\partial}{\partial y}\int Pdx + \frac{\partial\theta_{(y)}}{\partial y}$

Haciendo pasajes de términos: $\frac{\partial\theta_{(y)}}{\partial y} = Q - \frac{\partial}{\partial y}\int Pdx$ ⑪

Multiplicando ⑪ miembro a miembro por ∂y se obtiene:

$$\partial\theta_{(y)} = \left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\int Pdx\right]\partial y \quad ⑫$$

Integrando ⑫ $\int d\theta_{(y)} = \int\left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\int Pdx\right]dy$

(se escribe ***d*** en lugar de ∂ porque se está integrando en ***y***, es decir, ∂***y*** es derivada parcial en ***y***, y justamente estamos integrando en ***y***)

Luego $\boxed{\theta_{(y)} = \int\left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P_{(x)}\right]dy}$ ⑬ Es la función buscada.

Por ⑨ tenemos $\psi = \int Pdx + \theta_{(y)}$

Entonces reemplazando ⑬ en ⑨ $\boxed{\psi = \int Pdx + \int\left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P_{(x)}\right]dy}$

Que es la forma general de la solución de las ecuaciones diferenciales exactas.

➢ Factor integrante:

Dada una ecuación diferencial

$$P_{(x;y)}dx + Q_{(x;y)}dy = 0 \qquad ① \qquad Pdx + Qdy = 0$$

Si no se cumple la condición de simetría:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$ se dice que no es E. D. exacta.

Se la puede llevar a diferencial exacta mediante la aplicación del factor integrante.

Si en ① suponemos por hipótesis que existe una función $\mu_{(x\,;\,y)}$; que es factor integrante de la E.D. dada, este factor va a transformarla en diferencial exacta.

$$\mu\ (Pdx + Qdy) = 0$$

Es decir: $\mu \cdot P \cdot dx + \mu \cdot Q \cdot dy = 0$

Deberá cumplir: $\boxed{\dfrac{\partial \mu P}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu Q}{\partial x}}$ ②

Efectuando derivadas cruzadas: $\mu \dfrac{\partial P}{\partial y} + P \dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \dfrac{\partial Q}{\partial x} + Q \dfrac{\partial \mu}{\partial x}$

Agrupando términos:

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} - \mu \frac{\partial Q}{\partial x} = Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

Sacando factor común μ

$$\mu \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

O sea $\boxed{Q \dfrac{\partial \mu}{\partial x} - P \dfrac{\partial \mu}{\partial y} - \mu \left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0}$ ③

Siendo ésta una ecuación diferencial en derivadas parciales

Casos de factor integrante:

Consideremos $\mu = \mu_{(x\ ;\ y)}$

Pueden presentarse los siguientes casos:

I) $\mu = \mu_{(x)}$
2) $\mu = \mu_{(y)}$
3) $\mu = \mu_{(m)}$ $\quad m = x + y$
4) $\mu = \mu_{(n)}$ $\quad n = x \bullet y$
5) $\mu = \mu_{(h)}$ $\quad h = x^2 + y^2$
6) $\mu = \mu_{(k)}$ $\quad k = x^2 - y^2$

- Caso $\mu = \mu_{(x)}$

Como μ no depende de y $\Rightarrow$ $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ ④

también: $\partial x = dx$ ⑤

Reemplazando ④ y ⑤ en ③: $Q\frac{\partial \mu}{dx} - \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$

Reagrupando: $Q\frac{\partial \mu}{dx} = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$

$\Rightarrow$ $\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx$ ⑥

Integrando en ambos miembros en ⑥:

$$\int \frac{\partial \mu}{\mu} = \int \left[\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right]dx \quad \Rightarrow$$

Haciendo cuadratura: $\ln \mu = \int \left[\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right]dx$

Por antilogaritmo:

$\boxed{\mu = e^{\int \left[\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right]dx}}$ ⑦ Factor integrante para $\mu = \mu_{(x)}$

Para que la función ⑦ pueda integrarse debe ser función de x

- Caso $\mu = \mu_{(y)}$

Como μ no depende de x $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ ⑧ ;

también: $\partial y = dy$ ⑨

Reemplazando ⑧ y ⑨ en ③: $P\dfrac{\partial \mu}{dy} + \mu\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$

Reagrupando: $P\dfrac{\partial \mu}{dy} = -\mu\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\mu} = -\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dy$$

Integrando en ambos miembros:

$$\int \frac{\partial \mu}{\mu} = \int \left[-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right]dy \quad \Rightarrow$$

Haciendo cuadratura: $\ln \mu = \int \left[-\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)\right]dy$

Por antilogaritmo:

$$\boxed{\mu = e^{\int \left[-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right]dy}}$$ ⑩ Factor integrante para $\mu = \mu_{(y)}$

Para que la función ⑩ pueda integrarse debe ser función de y

- Caso $\mu = \mu_{(m)}$ siendo m (variable) $m = x + y$

Derivando respecto de y $\partial m = \partial y$ $\therefore$ $\dfrac{\partial m}{\partial y} = 1$

Así: $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{dm} \cdot \dfrac{\partial m}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{dm}$ ⑪ también $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{dm}$ ⑫

Recordamos: $\boxed{Q\dfrac{\partial \mu}{\partial x} - P\dfrac{\partial \mu}{\partial y} - \mu\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0}$ ③

Reemplazando ⑪ y ⑫ en ③: $Q\dfrac{d\mu}{dm} - P\dfrac{d\mu}{dm} - \mu\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$

Reagrupando: $\dfrac{d\mu}{dm}(P - Q) = -\mu\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) \Rightarrow \dfrac{1}{\mu}\dfrac{d\mu}{dm}(P - Q) = -\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dm} = -\frac{1}{(P - Q)}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \quad ⑬$$

Si el primer miembro de ⑬es sólo función de m, el segundo miembro también lo es.

Haciendo: $\dfrac{1}{\mu}\dfrac{d\mu}{dm} = \Lambda_{(m)}$ ⑭ $\wedge$ $\Lambda_{(m)} = -\dfrac{1}{(P - Q)}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$

Integrando ⑭: $\displaystyle\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \Lambda_{(m)} dm \Rightarrow$

Haciendo cuadratura: $\ln \mu = \displaystyle\int \Lambda_{(m)} dm + K \Rightarrow$

Por antilogaritmo:

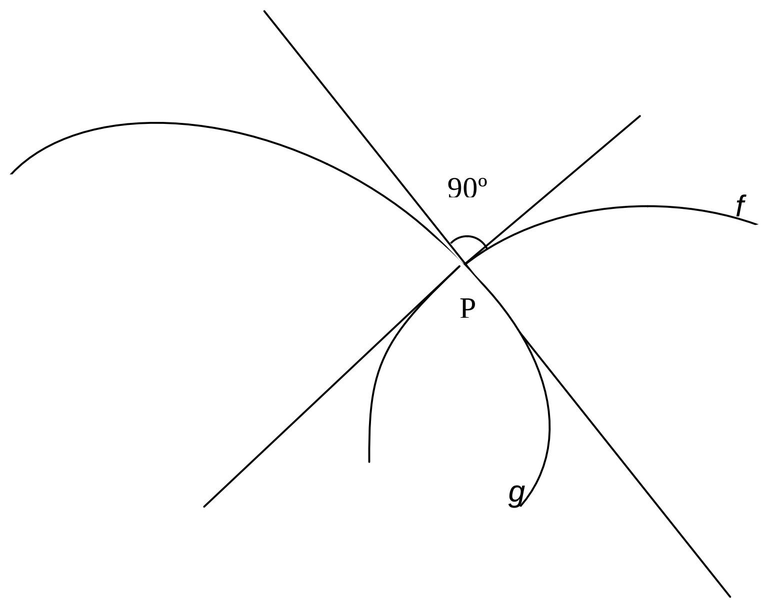
$$\mu = e^{\int \Lambda_{(m)} dm + K} \Rightarrow$$

$\boxed{\mu = K \cdot e^{\int \Lambda_{(m)} dm}}$ Factor integrante para $\mu = \mu_{(m)}$ / $m = x + y$

- Familia de Trayectorias Ortogonales

a) Curvas Ortogonales

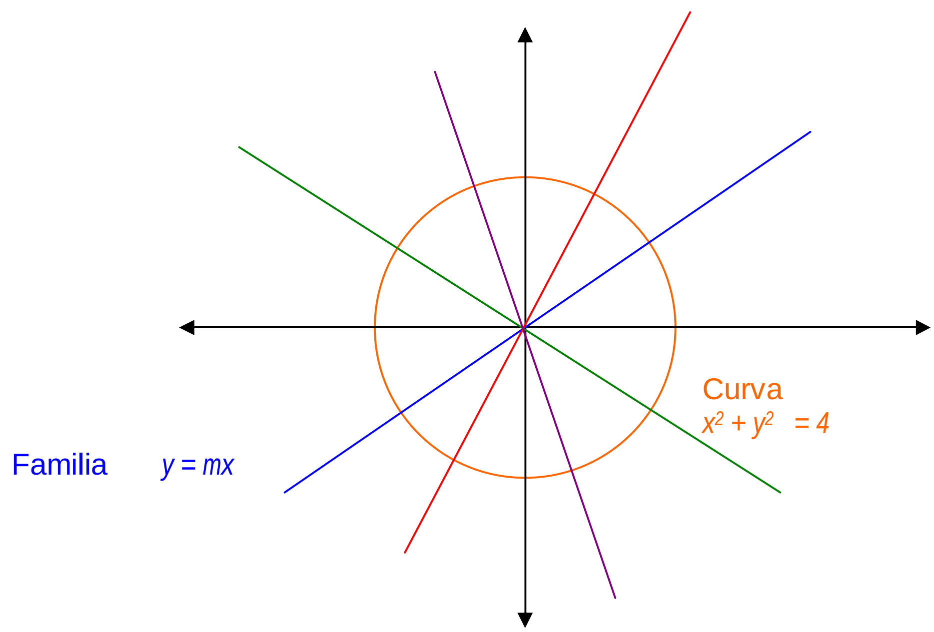
Dos curvas son ortogonales cuando sus respectivas tangentes, trazadas en el punto de intersección de las mismas, son ortogonales.



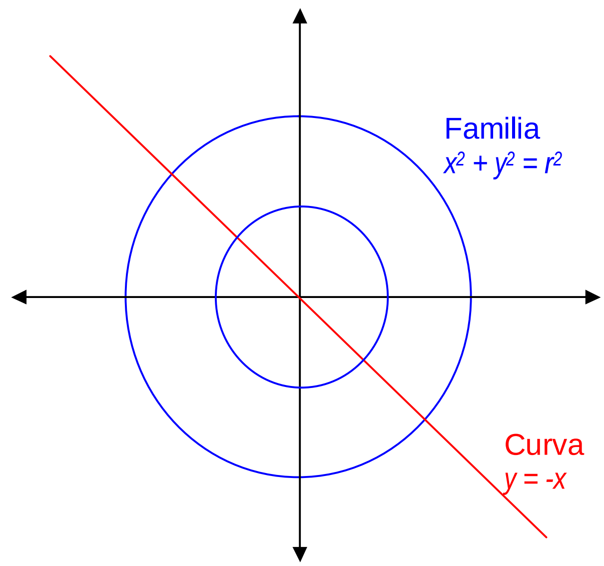
b) Curva ortogonal respecto de una familia simplemente infinita de curvas

Se dice que una curva es ortogonal respecto de una familia simplemente infinita de curvas cuando por cada uno de sus puntos pasa una curva de la familia dada y en dicho punto ambas curvas son ortogonales.

Ejemplo 1:



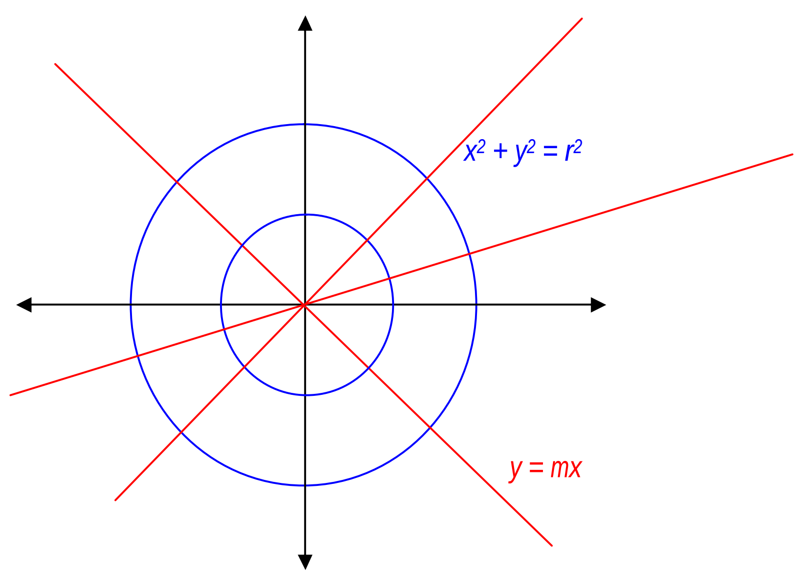
Ejemplo 2:



c) Familias de trayectorias ortogonales

Dadas dos familias simplemente infinitas de curvas, se dice que una es ortogonal respecto de la otra y recíprocamente, cuando cualquier curva de la primera familia es ortogonal respecto de cualquier curva de la segunda familia.

Ejemplo:



➢ Cálculo de la F T O de una familia dada.

Sea $\Phi_{(x,y,C)} = 0$ una familia simplemente infinita de curvas de la cual se desea calcular su FTO. Sabemos que cualquier curva de una familia dada con cualquier curva de la familia buscada, guarda una relación entre sus respectivas pendientes: estas deben ser números recíprocos y opuestos. Por otro lado sabemos que una ED enuncia una propiedad física común a todas las curvas de la familia dada.

Si la familia dada es una familia simplemente infinita de curvas, la ED que la misma origina va a enunciar una propiedad respecto de su derivada primera, es decir la de la pendiente

$\Phi_{(x,y,C)} = 0$ ①

$\dfrac{d\Phi_{(x,y,C)}}{dx} = 0$ ②

$g_{(x,\, y,\, y',\, C)} = 0$ ②´ (y` debe estar)

De ① y ②=②´ se trabaja algebraicamente para llegar a una expresión que no dependa de la constante. Es la ED de la familia dada.

$f_{(x,y,y')} = 0$ ③ ED de ① (no puede faltar en su solución)

En esta ED se sustituye $y' \to -\dfrac{1}{y'}$

obteniendo: $f_{\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right)} = 0$ ④

Obteniendo así la ED de la familia buscada. La Solución general de ④ es la FTO de ①

Ejemplo: dato: $y = mx$ ①

$y' = m$ ②

De ① y ②: $\boxed{y = y'x}$ ③ ED de ①

⇓

$\boxed{y = -\dfrac{1}{y'}x}$ ④ ED de FTO buscada

$y \cdot y' = -x \quad \Rightarrow \quad y \cdot dy = -xdx \quad \Rightarrow \quad \int y \cdot dy = -\int xdx + C$

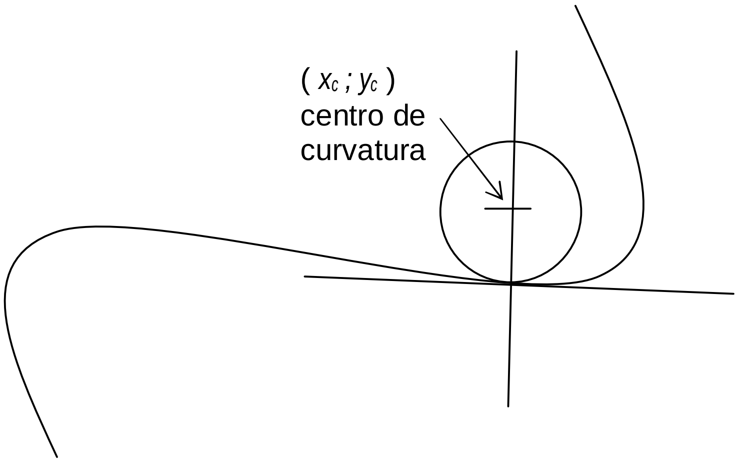
$\boxed{\dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{x^2}{2} + C}$

O también $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$ SG de ④

FTO de ①

- CIRCUNFERENCIA OSCULATRIZ

Es la circunferencia tangente a la curva en un punto dado.



Las ecuaciones del centro son:

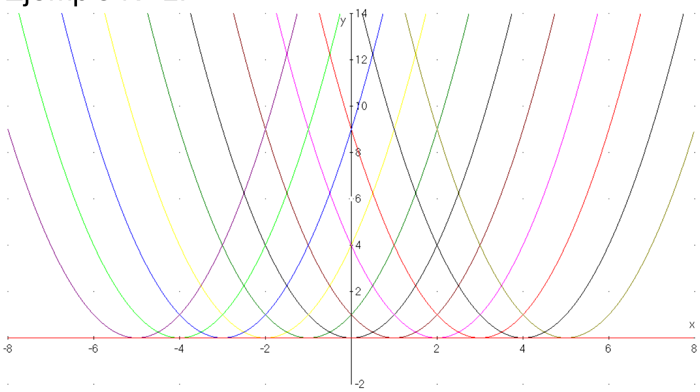
$$\begin{cases} x_C = x - y'\left(\dfrac{1+y'^2}{y''}\right) \\ y_C = y + \dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$$

▪ Envolvente

Definición:

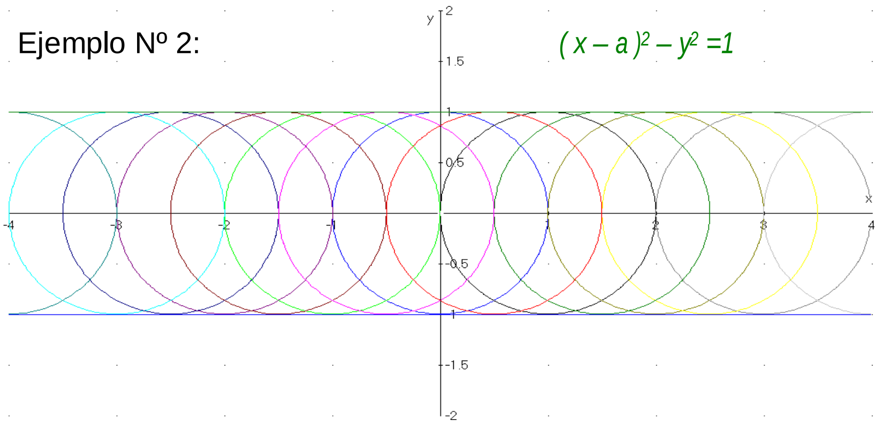
Dada una familia simplemente infinita de curvas se llama ENVOLVENTE de la misma a la curva que en cada uno de los puntos es tangente a una curva de la familia dada.

Ejemplo Nº 1: $y = (x + C)^2$



Envolvente $y = 0$

Ejemplo Nº 2: $(x - a)^2 - y^2 = 1$

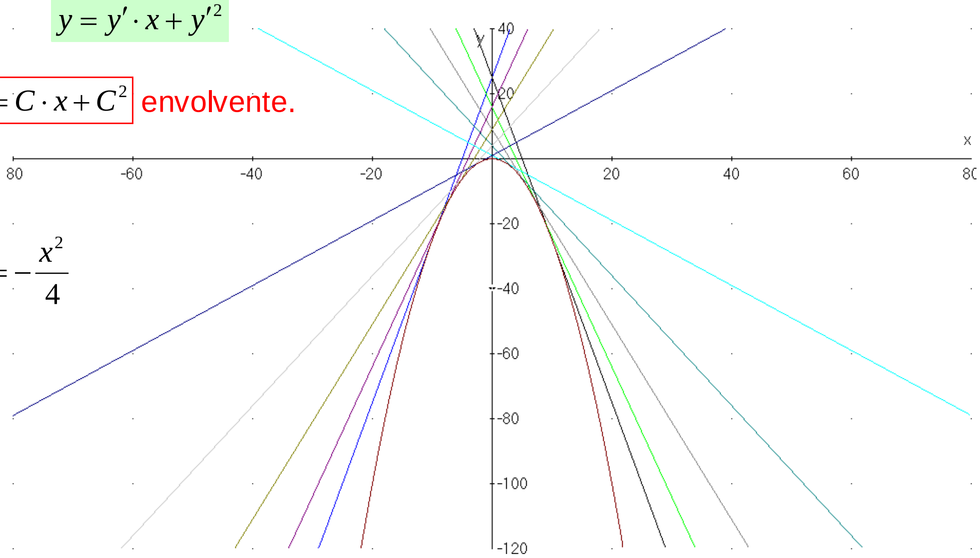


La envolvente: $y = 1$, $y = -1$ $y^2 = 1$

Cónica degenerada

Ejemplo Nº 3: $y = y' \cdot x + y'^2$

Solución general $\boxed{y = C \cdot x + C^2}$ envolvente.



Solución Singular: $y = -\dfrac{x^2}{4}$

Envolvente de una familia: $\varphi_{(x;y;C)} = 0$

$$\begin{cases} \varphi_{(x;y;C)} = 0 \\ \varphi'_{C(x;y;C)} = 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x = \alpha_{(C)} \\ y = \beta_{(C)} \end{cases}$$

Ejemplo Nº 1: Dato: $y = (x + C)^2$

Incógnita: *Envolvente*

$$\begin{cases} y - (x + C)^2 = 0 \\ -2(x + C) = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \varphi_{(x;y;C)} = 0 \\ \varphi'_{C(x;y;C)} = 0 \end{matrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi''_{xC} & \varphi''_{yC} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2(x + C) & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$\forall x_0; y_0; C_0$

$$\varphi''_{CC} = -2 \neq 0$$

Se cumplen las condiciones, $\therefore$ el sistema es la envolvente.

$$\begin{cases} y - (x + C)^2 = 0 \\ -2(x + C) = 0 \end{cases}$$

Envolvente: $\boxed{y = 0}$

Ejemplo Nº 2: Dato: $(x-a)^2 + y^2 = 1$

Incógnita: *Envolvente*

$$\varphi = (x - a)^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} \varphi_{(x;y;a)} = 0 \\ \varphi'_{a(x;y;a)} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x - a)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2(x - a)(-1) = 0 \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi''_{xa} & \varphi''_{ya} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2(x - a) & 2y \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4y \neq 0$$

$$\varphi''_{aa} = -1 \neq 0$$

$(x-a)^2 + y^2 - 1 = 0$

$-2\,(x-a) = 0$

$\boxed{y^2 = 1}$ $\qquad$ $\boxed{y = \pm 1}$

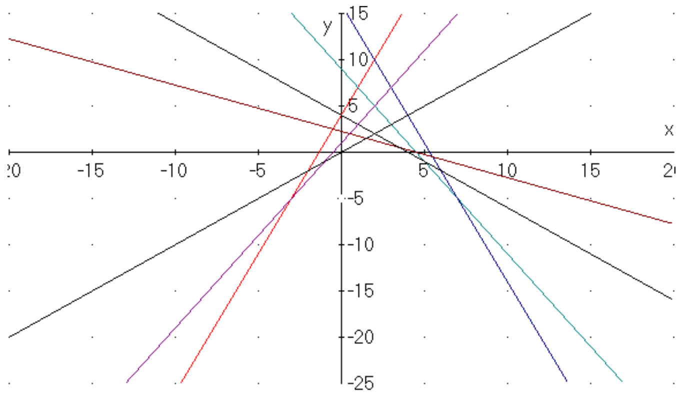
Trabajo Práctico Nº 2

Ejercicio ⑭ 1) Dato: $y = k.x + k^2 - 2k + 1$

Incógnita: *Envolvente*

Dato

(familia de rectas)



$$\begin{cases} y - kx - k^2 + 2k - 1 = 0 \\ -x - 2k = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_{(x;y;k)} = 0 \\ \varphi'_{k(x;y;k)} = 0 \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi''_{xk} & \varphi''_{yk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k+2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\varphi''_{kk} = -2 \neq 0$$

$$-2k = x \quad \Rightarrow \quad k = \frac{x}{-2}$$

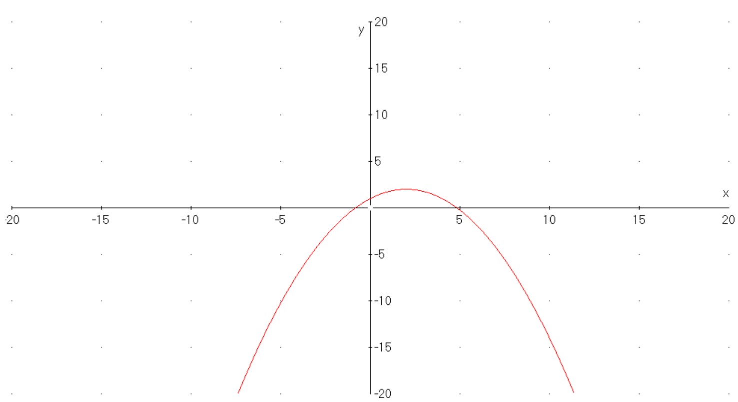
$$y + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y + \frac{x^2}{4} - x - 1 = 0$$

$$\boxed{y = -\frac{x^2}{4} + x + 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{4y = -x^2 + 4x + 4} \quad \textit{Envolvente}$$

Respuesta

Curva Envolvente

de la Familia



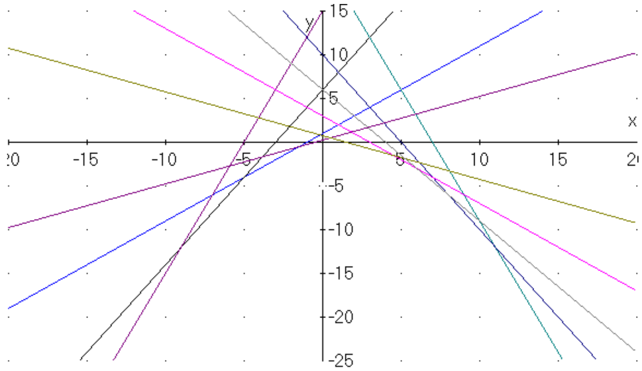
Trabajo Práctico Nº 2

Ejercicio ⑭ 2) Dato: $y = px + 2p^2 - p$

Incógnita: *Envolvente*

Dato

(familia de rectas)



$$\begin{cases} \varphi_{(x;y;a)} = 0 \\ \varphi'_{a(x;y;a)} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y - px - 2p^2 + p = 0 \\ -x - 4p + 1 = 0 \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi''_{xp} & \varphi''_{yp} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -p & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi''_{pp} = -4 \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -4p + 1 \quad \Rightarrow \quad y - p(-4p+1) - 2p^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = -4p + 1 \quad \Rightarrow \quad y - p(-4p+1) - 2p^2 + p = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y + 4p^2 - p - 2p^2 + p = 0 \quad \Rightarrow \quad y + 2p^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-1}{-4} = p \quad \Rightarrow \quad y + 2\left(\frac{x-1}{-4}\right)^2 = 0$$

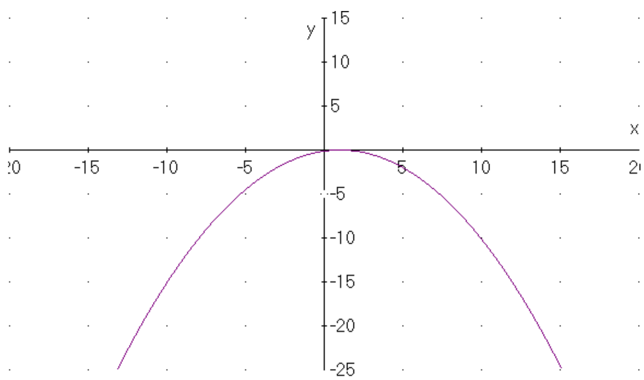
$$\Rightarrow \quad y + \frac{1}{8}(x-1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{8y + (x-1)^2 = 0}$$

Envolvente

Respuesta

Curva Envolvente

de la Familia



Trabajo Práctico Nº 2

Ejercicio ⑭ 3) Dato: $y = (x+a)^2$

Incógnita: Envolvente

$$\begin{cases} \varphi_{(x;y;a)} = 0 \\ \varphi'_{a(x;y;a)} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_{(x;y;a)} = y - (x+a)^2 = 0 \\ \varphi'_{a(x;y;a)} = -2(x+a) = 0 \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi''_{xa} & \varphi''_{ya} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2(x-a) & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$\varphi''_{aa} = -2 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y = 0} \text{ Envolvente}$$

Trabajo Práctico Nº 2

Ejercicio ⑭ 4) Dato: $(x - C)^2 + y^2 = 1$

Incógnita: Envolvente

$$\begin{cases} \varphi_{(x;y;C)} = 0 \\ \varphi'_{C(x;y;C)} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-c)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ -2(x-C) = 0 \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi''_{xC} & \varphi''_{yC} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(x+C) & 2y \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4y \neq 0$$

$$\varphi''_{CC} = 2 \neq 0$$

$$\boxed{y^2 = 1} \qquad \boxed{y = \pm 1} \qquad \text{Envolvente}$$

Trabajo Práctico Nº 2

Ejercicio ⑭ 5) Dato: $y^2 = a(x-a)$

Incógnita: Envolvente

$$\begin{cases} \varphi_{(x;y;a)} = 0 \\ \varphi'_{a(x;y;a)} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 - a(x-a) = 0 \\ -(x-a) + a = 0 \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi''_{xa} & \varphi''_{ya} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & 2y \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2y \neq 0$$

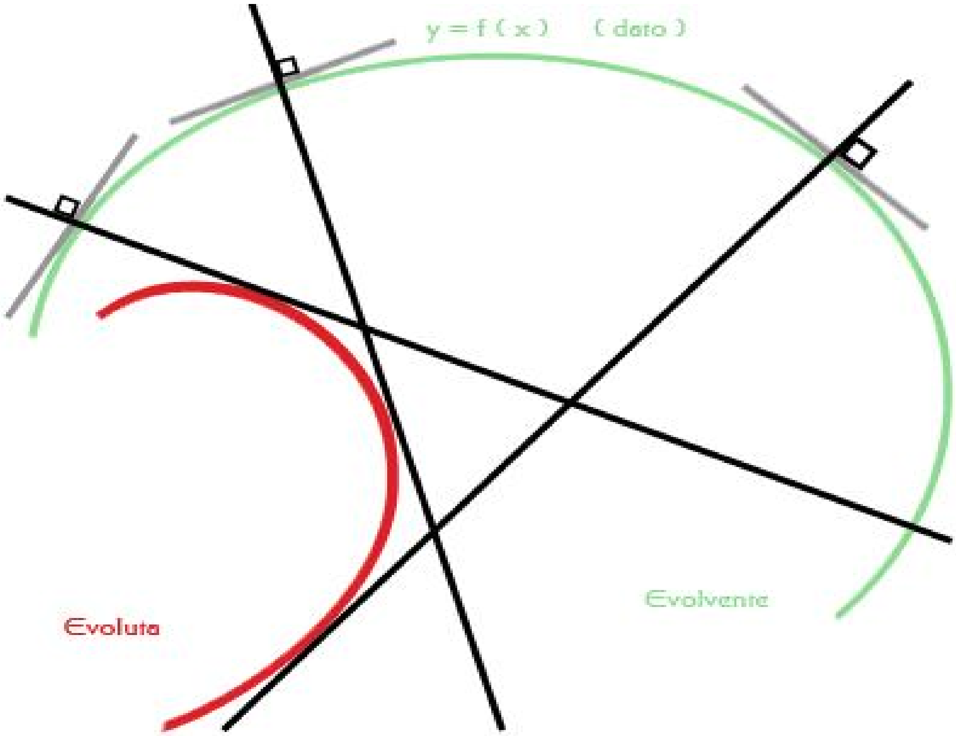
$$\varphi''_{aa} = 2 \neq 0$$

$$\begin{matrix} 2a - x = 0 \Rightarrow \\ y^2 - a(2a-a) = \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} 2a = x \\ y^2 - a^2 = 0 \end{matrix}} \qquad a = \frac{x}{2}$$

$$y^2 = a^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm a \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y = \pm \frac{x}{2}} \text{ Envolvente}$$

- EVOLUTA – EVOLVENTE

Dada una curva *y=f(x)* se llama evoluta de la misma a la envolvente de la familia de rectas normales a la curva dada. La curva dada recibe el nombre de evolvente.



1) Dato: *y=f(x)* ① (una curva: evolvente)
2) Se calcula la familia de rectas normales

$$y - y_0 = m (x - x_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'_{(x_0)}}(x - x_0) \quad \rightarrow \quad \text{Envolvente: familia simplemente infinita de curvas}$$

$$\left.\begin{array}{l} y - y_0 = -\dfrac{1}{f'_{(x_0)}}(x - x_0) \\ y = f_{(x)} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y_0 \to x_0 \\ x_0 \to y_0 \end{array}$$

$$\boxed{y - f_{(x_0)} = -\frac{1}{f'_{(x_0)}}(x - x_0)} \quad ②$$

Familia simplemente infinita de curvas

(rectas normales $y = f_{(x)}$)

3) Envolvente de ②
4) Respuesta de 3) es la evoluta de ①

Ejemplo 1: Dada $y^2 = 4x$ calcular la evoluta

1) Dato $y^2 = 4x$ ① (curva dada *evolvente*)
2) Familia de rectas normales

$y^2 = 4x \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_0^2 = 4x_0}$ ⓐ la necesito en un punto genérico

$2y \cdot y' = 4$ ↙

$y' = \dfrac{2}{y} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_0' = \dfrac{2}{y_0}}$ ⓑ ← ↙

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'_{(x_0)}}(x - x_0)$$

↓ⓑ ↓ⓐ

$\dfrac{2}{y_0} \qquad \dfrac{y_0^2}{4}$

Simplemente infinita de curvas

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{y_0}{2}\left(x - \frac{y_0^2}{4}\right)}$$ ② Familia de rectas normales de ①

3) Envolvente

$$\begin{cases} y - y_0 = -\dfrac{y_0}{2}x + \dfrac{y_0^3}{8} & ⓒ \\ -1 = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}y_0^2 & ⓓ \end{cases}$$

ⓒ Ecuaciones cartesianas paramétricas

ⓓ de la envolvente de ②

Pasando a la forma cartesiana de ⓓ

$\dfrac{x}{2} - 1 = \dfrac{3}{8}y_0^2$ ⓔ $\Rightarrow \boxed{x = \left(\dfrac{3}{8}y_0^2 + 1\right)2}$ ⓕ

Reemplazando ⓕ en ⓒ

$$y = y_0 - \frac{y_0}{2}\left(\frac{3}{8}y_0^2 + 1\right)\cdot 2 + \frac{y_0^3}{8} \quad \Rightarrow \quad y = y_0 - y_0\left(\frac{3}{8}y_0^2 + 1\right) + \frac{y_0^3}{8}$$

$$y = y_0 - \frac{3}{8}y_0^3 - y_0 + \frac{y_0^3}{8} \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{8}y_0^3 + \frac{y_0^3}{8} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -\frac{y_0^3}{4}}$$ ⓖ

De ⓖ elevada al cuadrado y de ⓔ elevada al cubo, tenemos:

$$\begin{cases} (y)^2 = \left(-\dfrac{y_0^3}{4}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \dfrac{y_0^6}{16} \quad \Rightarrow \quad 16y^2 = y_0^6 & ⓗ \\ \left(\dfrac{x}{2} - 1\right)^3 = \left(\dfrac{3}{8}y_0^2\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{x-2}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{512}y_0^6 \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{x-2}{2}\right)^3 \dfrac{512}{27} = y_0^6 & ⓘ \end{cases}$$

Igualando ⓗ ^ ⓘ :

$$16y^2 = \frac{512}{27}\left(\frac{x-2}{2}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{2^3 \times 16y^2}{512} = \frac{(x-2)^3}{27} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{y^2}{4} = \frac{(x-2)^3}{27}}$$

~~Envolvente~~ de ②

Evoluta de ①

Trabajo Práctico Nº 2

Ejercicio ⑮ 1) Dato: $y^2 = 4.x$

Incógnita: Evoluta

$y^2 = 4x$ ① $\Rightarrow$ $y_0^2 = 4x_0$ ② $\Rightarrow$ $\frac{y_0^2}{4} = x_0$ ③

$2y \cdot y' = 4$ $\Rightarrow$ $y \cdot y' = 2$ $y' = \frac{2}{y}$ ④ $\Rightarrow$ $y_0' = \frac{2}{y_0}$ ⑤

$y - y_0 = -\frac{1}{f'_{(x_0)}}(x - x_0)$ ⑥ Familia simplemente infinita de rectas normales

$y - y_0 = -\frac{y_0}{2}\left(x - \frac{y_0^2}{4}\right)$ ⑦ $\Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} y - y_0 = -\frac{y_0}{2}x - \frac{y_0^3}{8} \quad ⑧ \\ -1 = -\frac{x}{2} - \frac{3y_0^2}{8}(y_0') \quad ⑨ \end{array}\right\} \text{Envolvente de la familia}$$

$(y_0') = 1$ $\Rightarrow$ ⑨ queda: $-1 - \frac{3}{8}y_0^2 = -\frac{x}{2}$ $\Rightarrow$ $2 + \frac{3}{4}y_0^2 = x$ ⑩

⑩ en ⑧ $y - y_0 = -\frac{y_0}{2}\left(2 + \frac{3}{4}y_0^2\right) - \frac{y_0^3}{8}$ $\Rightarrow$ $y = y_0 - y_0 - \frac{3}{8}y_0^3 - \frac{y_0^3}{8}$

$y = -\frac{1}{2}y_0^3$ ⑪

$$\left\{\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}y_0^3 \\ -1 = -\frac{x}{2} + \frac{3}{8}y_0^2 \end{array}\right.$$

Resuelvo el sistema

De ⑪: $-2y = y_0^3$ $\Rightarrow$ $(-2y)^2 = (y_0^3)^2$ $\Rightarrow$ $(-2y)^2 = y_0^6$ ⑫

De ⑨: $-1 = -\frac{x}{2} + \frac{3y_0^2}{8}$

$\left(-1 + \frac{x}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{8}y_0^2\right)^3$ $\Rightarrow$ $\left(-1 + \frac{x}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{8}y_0^3\right)^3$ $\Rightarrow$ $\left(-1 + \frac{x}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3 = y_0^6$ ⑬

De ⑬ y ⑫: $4y^2 = \left(-1 + \frac{x}{2}\right)^3 \left(\frac{8}{3}\right)^3$ $\Rightarrow$ $\frac{4}{8^3}y^2 \cdot 27 = \left(-1 + \frac{x}{2}\right)^3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\frac{27 \times 4}{8^3}y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3(-2 + x)^3$ $\Rightarrow$ $\frac{27}{8^2} \times 4y^2 = (-2 + x)^3$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{y^2}{16} = \frac{(-2 + x)^3}{27}}$$ Evoluta

Trabajo Práctico Nº 2

Ejercicio ⑮ 2) Dato: $y = x^2 - \frac{1}{2}$

Incógnita: *Evoluta*

$$y_0 = x_0^2 - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \sqrt{y_0 + \frac{1}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$y' = 2x \quad \Rightarrow \quad y_0' = 2x_0$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - x_0^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2x_0}(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y = x_0^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2x_0}(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad y = x_0^2 - \frac{1}{2} - \frac{x}{2x_0} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = x_0^2 - \frac{x}{2x_0} \quad \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} y = x_0^2 - \dfrac{x}{2x_0} \\ -2x_0 = \dfrac{x}{2}x_0^{-2} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \quad y - x_0^2 = -\dfrac{x}{2x_0} \quad \Rightarrow \quad \text{Derivando:} \quad -2x_0 = -\dfrac{x}{2}(-1)x_0^{-2} \\ \Leftarrow \quad -2x_0 = \dfrac{x}{2}x_0^{-2} \quad \Leftarrow \quad \Leftarrow \quad \Leftarrow \quad \Leftarrow \quad \hookleftarrow \end{array}$$

$$-2x_0x_0^2 = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad -4x_0^3 = x \quad \Rightarrow \quad y = x_0^2 - \frac{-4x_0^3}{2x_0} = x_0^2 + 2x_0^2 = 3x_0^2 \quad \Rightarrow$$

$$y = 3x_0^2 \quad \Rightarrow \quad y^3 = 27x_0^6 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^3}{27} = x_0^6 \quad \Rightarrow \quad x = -4x_0^3 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 = 16 \cdot x_0^6 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{16} = x_0^6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{y^3}{27} = \frac{x^2}{16}}$$

Evoluta

- E. D. de Segundo Orden, con coeficientes constantes.

En estas ecuaciones, la solución general tiene dos constantes de integración. Para obtener la solución particular única, es necesario fijar las condiciones iniciales.

Además de determinar un punto, como por cada punto pueden pasar infinitas curvas, es necesario fijar la pendiente de la tangente a la curva de acuerdo con la interpretación geométrica de la derivada.

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden tienen la forma:

$$\frac{d^2y}{d^2x}+p\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$$

➲ Solución de las ecuaciones diferenciales de segundo orden incompletas.

Cuando $f(x)=0$

Luego: $$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0 \quad ①$$

La solución viene dada por una expresión de la forma:

$$y=e^{rx}$$

Y la derivada de esta expresión será:

$$\frac{dy}{dx}=r\cdot e^{rx} \quad ②$$

La derivada segunda:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=r^2\cdot e^{rx} \quad ③$$

Sustituyendo ② y ③ en ① tenemos:

$$r^2e^{rx}+p\cdot r\cdot e^{rx}+q\cdot e^{rx}=0$$

Sacando factor común e^{rx}

$$e^{rx}(r^2+p\cdot r+q)=0 \quad \Rightarrow \quad r^2+p\cdot r+q=0$$

Que es la ecuación característica de la ecuación diferencial dada.

$r_1 \wedge r_2$ son las raíces de la ecuación característica.

Por ser una ecuación de segundo grado, tendremos tres alternativas:

a) $r_1 \neq r_2$ $\quad r_1 \wedge r_2 \in \mathbb{R}$

b) $r_1 = r_2$ $\quad r_1 \wedge r_2 \in \mathbb{R}$

c) $r_1 \wedge r_2$ Imaginarias, complejas conjugadas

Caso a) $r_1 \neq r_2$ $r_1 \wedge r_2 \in \mathbb{R}$

La solución será de la forma

$$y = A \cdot e^{r_1 x} + B \cdot e^{r_2 x}$$ ④ siendo $r_1 \wedge r_2$ las raíces de la ecuación característica.

Por ser solución de la ecuación diferencial, debe verificarse:

De ①: $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$

Derivando ④: $\frac{dy}{dx} = A \cdot r_1 \cdot e^{r_1 x} + B \cdot r_2 \cdot e^{r_2 x}$ ⑤

Volviendo a derivar ⑤: $\frac{d^2y}{dx^2} = A \cdot r_1^2 \cdot e^{r_1 x} + B \cdot r_2^2 \cdot e^{r_2 x}$ ⑥

Reemplazando ④ $\wedge$ ⑤ $\wedge$ ⑥ en ① tenemos:

$$A \cdot r_1^2 \cdot e^{r_1 x} + B \cdot r_2^2 \cdot e^{r_2 x} + p \cdot A \cdot r_1 \cdot e^{r_1 x} + p \cdot B \cdot r_2 \cdot e^{r_2 x} + q \cdot A \cdot e^{r_1 x} + q \cdot B \cdot e^{r_2 x} = 0$$

Sacando factor común:

$$A \cdot e^{r_1 x} \cdot \underbrace{\left(r_1^2 + p \cdot r_1 + q\right)}_{0} + B \cdot e^{r_2 x} \cdot \underbrace{\left(r_2^2 + p \cdot r_2 + q\right)}_{0} = 0$$

Caso b) $r_1 = r_2$ $r_1 \wedge r_2 \in \mathbb{R}$ (reales y coincidentes)

La solución es de la forma:

$$y = A \cdot e^{rx} + B \cdot x \cdot e^{rx} = (A + B \cdot x) \cdot e^{rx}$$ ⑦

De la ecuación ①: $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$

Debemos probar si la solución se verifica.

Derivando ⑦:

$$\frac{dy}{dx} = A \cdot r \cdot e^{rx} + B \cdot r \cdot x \cdot e^{rx} + B \cdot e^{rx}$$ ⑧

Y volviendo a derivar:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A \cdot r^2 \cdot e^{rx} + B \cdot r^2 \cdot x \cdot e^{rx} + B \cdot r \cdot e^{rx} + B \cdot r \cdot e^{rx}$$ ⑨

Reemplazando ⑦ $\wedge$ ⑧ $\wedge$ ⑨ en ①:

$$A \cdot r^2 \cdot e^{rx} + B \cdot r^2 \cdot x \cdot e^{rx} + B \cdot r \cdot e^{rx} + B \cdot r \cdot e^{rx} + p\left(A \cdot r \cdot e^{rx} + B \cdot r \cdot x \cdot e^{rx} + B \cdot e^{rx}\right) + q\left(A \cdot e^{rx} + B \cdot x \cdot e^{rx}\right) = 0$$ ⑩

$$A \cdot e^{rx} \cdot \left(r^2 + pr + q\right) + B \cdot x \cdot e^{rx}\left(r^2 + pr + q\right) + B \cdot e^{rx}\left(2r + p\right) = 0$$

Si $r^2 + pr + q = 0$

$\varphi_{(r)} = r^2 + pr + q$

$\varphi'_{(r)} = 2r + p$

Luego: $2r + p = 0$

Caso c) $r_1 \wedge r_2$ Imaginarias, complejas conjugadas

$r = a \pm bi$

La solución es de la forma: $y = Ae^{(a+bi)x} + Be^{(a-bi)x}$ $\Rightarrow$ $y = e^{ax}\left(Ae^{bix} + Be^{-bix}\right)$

Empleando la fórmula de Euler:

$$e^{bix} = \cos(bx) + i \cdot sen(bx)$$
$$e^{-bix} = \cos(bx) - i \cdot sen(bx)$$

Reemplazando:

$$y = e^{ax}\left[A(\cos bx + i \cdot senbx) + B(\cos bx - i \cdot senbx)\right]$$
$$y = e^{ax}\left[\cos bx(A+B) + i \cdot senbx(A-B)\right]$$

Considerando A ^ B como complejos conjugados, en forma polar:

$$\begin{cases} A = \cos\theta + i \cdot sen\theta \\ B = \cos\theta - i \cdot sen\theta \end{cases} \quad ⑪$$

Sumando miembro a miembro ⑪:

$$A + B = 2\cos\theta = F\cos\theta \quad ⑫$$

Restando miembro a miembro ⑪:

$$A - B = 2 \cdot i \cdot sen\theta = G \cdot i \cdot sen\theta \quad ⑬$$

De acuerdo a ⑫ ^ ⑬, la ecuación puede expresarse:

$$y = e^{ax}\left[\cos(bx) \cdot F \cdot \cos\theta + i \cdot sen(bx) \cdot G \cdot i \cdot sen\theta\right]$$
$$y = e^{ax}\left[F \cdot \cos(bx) \cdot \cos\theta - G \cdot sen(bx) \cdot sen\theta\right]$$

También:

$$y = e^{ax}\cos(bx + \theta)$$

Siendo θ una constante.

- Ecuaciones Diferenciales De Segundo Orden, Lineales, $\underbrace{\text{No Homogéneas}}_{\text{(Completas)}}$

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f_{(x)} \qquad / \qquad \begin{cases} a_0 \neq 0 \\ a_0 ; a_1 ; a_2 \in \mathbb{R} \\ \forall x : f_{(x)} \neq 0 \end{cases}$$

La solución general de esta ED es la suma de dos soluciones $(y_h ; y_p)$ donde y_h representa la SG de la ecuación homogénea correspondiente a la dada:

$$a_0 y_h'' + a_1 y_h' + a_2 y_h = 0$$

Donde y_p representa una SP de la ecuación a resolver

$$a_0 y_p'' + a_1 y_p' + a_2 y_p = f_{(x)}$$

La solución es: $y = y_h + y_p$

Ⓗ $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f_{(x)}$ ①

Ⓣ SG de ① $y = y_h + y_p$ ②

Ⓓ $y = y_h + y_p$ ②

Derivando ②: $y' = y_h' + y_p'$ ③

Derivando ③: $y'' = y_h'' + y_p''$ ④

Reemplazando ② ; ③ y ④ en ①

$$a_0 \left(y_h'' + y_p'' \right) + a_1 \left(y_h' + y_p' \right) + a_2 \left(y_h + y_p \right) =$$

$$= \underbrace{\left[a_0 y_h'' + a_1 y_h' + a_2 y_h \right]}_{= 0} + \underbrace{\left[a_0 y_p'' + a_1 y_p' + a_2 y_p \right]}_{= f_{(x)}} =$$

y_h SG de la ecuación homogénea $\qquad$ y_p SP de ①

$\Rightarrow$ $\boxed{y = y_h + y_p}$ $\rightarrow$ solución de ①

$$\begin{cases} y_h \text{ SG de la ecuación homogénea arrastra dos constantes arbitrarias e independientes} \\ y_p \text{ no tiene constantes} \end{cases}$$

$\boxed{y = y_h + y_p}$ Solución General

Ejemplo:

$y'' - 7y' + 12y = x$ ①

SG: $y = y_h + y_p$ ②

Cálculo de y_h

$y_h'' - 7y_h' + 12y_h = 0$

$r^2 - 7r + 12 = 0$

$r_1 = 3$

$r_2 = 4$

$\boxed{y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}}$

- Cálculo de y_h

Métodos para el cálculo de y_h

1) Método de los coeficientes indeterminados o método de partes variables
2) Método de variación de parámetros (Lagrange)

1) <u>Método de los coeficientes indeterminados</u>

a) ¿Qué es "parte variable"?
b) Método en sí

a) <u>Parte variable</u>

Se llama parte variable de un término a la parte del mismo que multiplica a la constante

Ejemplo: $\frac{3}{4}\underbrace{\boxed{x^2 sen2x}}_{\text{p.v.}}$

$-2\underbrace{\boxed{\ln 3x}}_{\text{p.v.}}$

Existen funciones que presentan términos que tienen la particularidad que luego de un número finito de derivadas no originan partes variables nuevas.

Ejemplos:

$f_{(x)} = 3 \cdot x^2 + 5 \cdot e^{3x} - sen2x$

$f'_{(x)} = 6 \cdot x + 15 \cdot e^{3x} - 2 \cdot \cos 2x$

$f''_{(x)} = 6 \times 1 + 45 \cdot e^{3x} + 4 \cdot sen2x$

$f'''_{(x)} = 0 \times 1 + 135 \cdot e^{3x} + 8 \cdot \cos 2x$

Se demuestra que estas funciones deben presentar términos de la forma:

$C_1 x^n e^{mx} sen\alpha x$ ó $C_2 x^n e^{mx} \cos \beta x$

$n \in Z_0^+$; $m \in \mathbb{R}$; $\alpha \in \mathbb{R}$; $\beta \in \mathbb{R}$

También existen otras funciones que presentan términos tales que al calcular sus sucesivas derivadas dan siempre lugar a partes variables nuevas:

Ejemplos:

$f_{(x)} = \sqrt{x}\ln x + arctg(x)$

$f'_{(x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2}$

- - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - -

≠ ≠ ≠

b) Método de los coeficientes indeterminados o método de partes variables

Para el cálculo de y_h mediante este método debe mirarse el 2º miembro de la ED a resolver:

$a_0 y''_p + a_1 y'_p + a_2 y_p = f_{(x)}$ ①

$\uparrow$ mirar

Este método es sólo válido cuando $f_{(x)}$ es una función que presenta términos de la forma:

$C_1 x^n e^{mx} sen\alpha x$

$C_2 x^n e^{mx} \cos\beta x$ / $n \in Z_0^+$; $m \in \mathbb{R}$; $\alpha \in \mathbb{R}$; $\beta \in \mathbb{R}$

Este método es sólo válido para aquellas funciones cuyos términos, luego de un número finito de derivadas, no presentan partes variables nuevas.

Ejemplos:

$y'' - 3y' =$ puedo

$x \cdot e^x =$ puedo

$\sqrt{x} =$ no puedo

Sea $f_{(x)}$ una función que cumple con tales requisitos. Para el cálculo de y_h se procede de la siguiente manera:

$a_0 y''_p + a_1 y'_p + a_2 y_p = f_{(x)}$ ①

SG $y = y_h + y_p$ ②

$\boxed{y_h}$ $a_0 y''_h + a_1 y'_h + a_2 y_h = 0$

$a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0$

$\boxed{y_h = C_1 y_{1(x)} + C_2 y_{2(x)}}$ Función complementaria

p.v. $\left[y_{1(x)}\ ; y_{2(x)}\right]$

$y_p \rightarrow$ "receta"

Se deriva la función tantas veces como sea necesario tal que sus términos no originen partes variables nuevas. Cada término origina un grupito de partes variables. A estos grupitos se los somete al siguiente análisis:

Se observa si algún grupito está incluido en otro, en caso afirmativo se lo desprecia.

Se observa si alguna parte de algún grupito es a su vez parte variable de la función complementaria. En caso afirmativo se lo multiplica por x solamente el grupo donde la parte se repite y se vuelve a controlar si alguna parte de este nuevo grupo se repite en la función complementaria; en caso afirmativo se vuelve a multiplicar por x a cada parte del grupo que se repite y así sucesivamente hasta que ninguna parte de ningún grupito se repita en la función complementaria.

Por último se forma un único grupo con todas las partes variables así obtenidas.

La y_p que se busca es una combinación lineal de las partes variables calculadas.

Para determinar los coeficientes de la combinación lineal deberá tenerse en cuenta dos cosas:

1) El concepto de SP
2) Principio de identidad de polinomios o yuxtaposición de términos

Ejemplos:

$$y'' - 7y' + 12y = x \quad ①$$

SG $\quad y = y_h + y_p \quad ②$

$\boxed{y_h}$ $\quad y_h'' - 7y_h' + 12y_h = 0$

$$r^2 - 7r + 12 = 0$$

$$r_1 = 3 \qquad r_2 = 4$$

$\boxed{y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}}$ Función complementaria

Parte variable $\left[e^{3x}; e^{4x}\right]$

y_p

$$f_{(x)} = x$$

$$f'_{(x)} = 1$$

$$f''_{(x)} = 0$$

(x ; 1)

$$y_p = A \cdot x + B \cdot 1$$

$$y'_p = A$$

$$y''_p = 0$$

$$0 + 7(A) + 12(A \cdot x + B \cdot 1) = x$$

$$\begin{cases} -7A + 12B = 0 \\ 12A = 1 \end{cases} \qquad A = \frac{1}{12} \qquad B = \frac{7}{144}$$

$\boxed{y_p = \frac{1}{2}x + \frac{7}{144}}$ $\quad$ $\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{1}{12}x + \frac{7}{144}}$ SG

➢ INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES.

Se denominan funciones racionales a las funciones del tipo $\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}$ Siendo P(x) y Q(x), polinomios en x.

Vamos a estudiar la integración de funciones racionales distinguiendo dos casos, según que el grado de P(x) sea menor que el de Q(x), o que sea igual o mayor.

<u>a) Caso en que el grado de P(x) es menor que el grado de Q(x).</u>

Sea, por ejemplo, resolver la integral $\int \frac{1}{x^2+1}dx$

Aquí el grado del numerador es menor que el del denominador, puesto que el numerador es un polinomio de grado cero (es decir, una constante) y el denominador tiene grado 2.

En este caso comenzaremos por operar con el integrando, descomponiendo el denominador en una diferencia de cuadrados. Si el denominador fuera en general una expresión cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c$ siempre es posible descomponerlo en la forma $a(x - x_1).(x - x_2)$, siendo x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Vamos a suponer ahora que la fracción $\frac{1}{x^2+1}$ es la suma de dos fracciones. Como el denominador de la fracción suma ha de ser igual al producto de los denominadores de las fracciones sumandos, podemos escribir:

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \qquad ①$$

siendo A y B dos valores a determinar. Haciendo la suma de las fracciones que aparecen en el segundo miembro de la igualdad anterior, se tiene: $\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}$ ②

Pero el numerador de esta fracción debe ser igual a 1 que es el numerador de la fracción que aparece en el primer miembro de ①. Haciendo los productos y agrupando términos en el numerador de ② resulta:

$$\frac{(A+B)\cdot x+(A-B)}{(x-1)\cdot(x+1)}$$

Por lo tanto, deberá ser: $1 = (A+B)\cdot x + (A-B)$

En el segundo miembro aparece un polinomio de grado l y en el primer miembro un polinomio de grado cero. Si son iguales, deben serlo término a término. Y como en el polinomio del primer miembro el coeficiente de x es cero (por eso no aparece término en x), también deberá ser cero el coeficiente de x en el polinomio del segundo miembro; es decir, deberá ser: $A + B = 0$ ③

Por un razonamiento semejante, deberá ser: $A - B = 1$ ④

Reuniendo las igualdades ③ y ④ resulta un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} A + B = O \\ A - B = 1 \end{cases}$$

que se puede resolver inmediatamente sumando las ecuaciones, con lo cual resulta: $2A = 1$,
de donde se deduce: $A = ½$

Y siendo $A + B = 0$, despejando B se tiene: $B = - A = - ½$. Determinados así los valores de A y B, sustituyendo en la igualdad (1) queda:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \qquad ⑤$$

En consecuencia, la integral del primer miembro de ⑤, que es la que debemos resolver, será igual a la integral del segundo miembro. Respecto de ésta podemos hacer uso de las propiedades que ya conocemos, extrayendo la constante fuera del signo integral y sustituyendo luego la integral de la diferencia de funciones por la diferencia de las integrales de esas funciones. Nos queda entonces:

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x+1}dx\right) + K$$

Resolviendo las integrales, nos queda:

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\left[\ln(x-1) - \ln(x+1)\right] + \ln C$$

Aplicando propiedades del logaritmo:

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \ln C\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

b) Caso en que el grado de P(x) es mayor o igual que el grado de Q(x).

Este caso se puede reducir al primero, porque si en un cociente de polinomios el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, siempre es posible efectuar la división indicada, obteniéndose un cociente -que será un polinomio- más un resto -que será un polinomio de grado menor que el divisor.

Sea por ejemplo resolver la integral: $\int \frac{3x^3-3x+1}{x^2-1}dx$

Como el grado del polinomio numerador es mayor que grado del polinomio denominador, efectuamos la división indicada:

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 - 3x + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} \underline{3x^3 - 3x\quad} & 3x \\ \qquad\qquad 1 & \end{array}$$

Por lo tanto, podemos escribir: $3x^3 - 3x + 1 = (x^2 - 1).\ 3x + 1$

Y dividiendo ambos miembros por $x^2 - 1$:

$$\frac{3x^3 - 3x + 1}{(x^2 - 1)} = 3x + \frac{1}{(x^2 - 1)}$$

En consecuencia, la integral del primer miembro, que es 1a que deseamos calcular, será igual a la suma de las integrales de las expresiones que aparecen en el segundo miembro, de las cuales la segunda ya ha sido calculada en el ejemplo anterior. Por lo tanto, tendremos:

$$\int \frac{3x^3-3x+1}{x^2-1}dx = \int\left[3x + \frac{1}{x^2-1}\right]dx = \int 3x \cdot dx + \int \frac{dx}{x^2-1}$$

$$\int \frac{3x^3-3x+1}{x^2-1}dx = \frac{3}{2}x^3 + \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$$

N. P. U. R.

ALFABETO GRIEGO:

Mayúscula	Minúscula	Nombre	Mayúscula	Minúscula	Nombre
A	α	Alfa	N	ν	Nu
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Ómicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Épsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ ς	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Ypsilon
I	ι	Iota	Φ	φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Ji o Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	Mu	Ω	ω	Omega

BIBLIOGRAFÍA:

1) REY PASTOR, PICALLEJA Y TREJO: Análisis Matemático

2) SOKOLNIKOFF: Matemática Superior Para Ingenieros Y Físicos

3) PISCKUNOV: Cálculo Diferencial E Integral

4) MORRIS-BROWN: Ecuaciones Diferenciales

5) APOSTOL: Cálculus Volumen 1-2

6) RAGAY-KAVALIAUSKAS: Guía De Trabajos Prácticos Y Apuntes De Clase