TEOREMAS DE GÖDEL

Es imposible presentar una prueba meta-matemática de la consistencia de un sistema lo bastante comprensivo como para contener toda la aritmética (a menos que se empleen en la prueba, reglas de deducción que difieran en ciertos aspectos esenciales de las reglas de transformación utilizadas para derivar teoremas dentro del sistema).

La argumentación de Gödel hace que sea improbable el que pueda darse una prueba finitista de la consistencia de la Aritmética.

Cualquier sistema dentro del cual pueda desarrollarse la aritmética, es **esencialmente** incompleto.

Dado cualquier conjunto consistente de axiomas aritméticos, existen proposiciones aritméticas verdaderas que no pueden ser derivadas de dicho conjunto

Aún cuando los axiomas de la aritmética sean ampliados con un número indefinido de otros axiomas verdaderos, siempre quedarán verdades aritméticas que no son formalmente derivables del conjunto ampliado.

Resumen de las pruebas de GÖDEL

A) La numeración de GÖDEL

GÖDEL demostró en primer lugar que es posible asignar un único número a cada signo elemental, a cada fórmula y a cada prueba. Este número es EL NÚMERO DE GÖDEL.

Signos elementales
- CONSTANTES ~ 10 =
- VARIABLES
  - numericas x y z
  - sentenciales p q r
  - predicativas P Q R.

B) LA ARTMETIZACION DE LA METAMATEMATICA

Toda proposición metamatemática acerca de la aritmética puede ser reflejada dentro de la ARITMÉTICA asociando a cada expresión un número de GÖDEL.

Así las relaciones de dependencia lógica entre las propociciones metamatemáticas se reflejan en las relaciones numéricas de dependencia entre sus correspondientes fórmulas aritméticas.

C) NÚCLEO DE LA ARGUMENTACION DE GÖDEL

I) construyó una fórmula metamatemática: G = "la fórmula G no es demostrable"

II) G es demostrable ssi ~G es demostrable.

Si el cálculo es consistente: ni G ni ~G son derivables de los axiomas. Si la aritmética es consistente: G es indecidible

III) G no es demostrable, pero G es verdadera

IV) construyó una fórmula aritmética A

que representa la proposición metamatemática "la aritmética es consistente" y demostró "A ⊃ G"

v) A no es demostrable

∴ la consistencia de la aritmética no puede ser establecida por un argumento representable en el cálculo aritmético formal.

La HIPOTESIS DEL CONTINUO (HC): no hay ningún conjunto cuya cardinalidad sea mayor que $\aleph_0$, pero menor que la cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto cuya cardinalidad sea $\aleph_0$

$$\sim\left(\exists \beta \;/\; \aleph_0 < \beta < 2^{\aleph_0}\right) \Rightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_1 = C$$

HIPOTESIS GENERALIZADA DEL CONTINUO (HGC): para la cardinalidad de un conjunto infinito, la siguiente cardinalidad más alta es la de su conjunto potencia.

$$\sim\left(\exists \beta \;/\; \aleph_n < \beta < 2^{\aleph_n}\right) \Rightarrow 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$$