Teorema de Bolzano-Weierstrass

Sea A un conjunto infinito y acotado de números reales. Entonces A tiene al menos un punto de acumulación

Demostración:

Como A es acotado, A es subconjunto de un intervalo cerrado: $I_1 = [a_1\ b_1]$. Bisecando I_1:

$$\left[a_1 ;\ \tfrac{1}{2}(a_1+b_1)\right] \quad \text{a} \quad \left[\tfrac{1}{2}(a_1+b_1) ;\ b_1\right] \qquad (1)$$

Nótese que no es posible que ambos intervalos tengan un número finito de puntos de A porque A es infinito. Sea $I_2 = [a_2\ b_2]$ uno de los subintervalos en (1) que contiene un número infinito de puntos de A.

Ahora biseco I_2

$$\left[a_2 ;\ \tfrac{1}{2}(a_2+b_2)\right] \quad \text{a} \quad \left[\tfrac{1}{2}(a_2+b_2) ;\ b_2\right]$$

Al menos uno de los dos contiene un número infinito de puntos de A. Llámese I_3 a ese intervalo.

Al continuar ese proceso, se obtiene una sucesión de intervalos en encaje

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$$

tal que cada I_n contiene un número infinito de puntos de A y

$$\lim |I_n| = 0$$

donde $|I_n|$ es la longitud del intervalo I_n

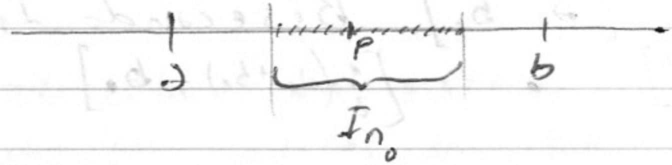
Por la propiedad de encaje de intervalos de números reales, existe un punto p que pertenece a todos y cada uno de los intervalos I_n.

Queda demostrar que p es punto de acumulación de A

Sea $S_p = (a\ b)$ un intervalo abierto que contiene a p. Como $\lim |I_n| = 0$,

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ / \ |I_{n_0}| < \min(p-a,\ b-p)$$

Entonces, el intervalo I_{n_0} es un subconjunto del intervalo abierto $S_p = (a,b)$



Como I_{n_0} contiene un número infinito de puntos de A, también lo contiene el intervalo abierto S_p. Así todo intervalo abierto que contiene a p contiene otros puntos de A diferentes de p, es decir, p es un punto límite de A

N.P.V.R.