Teorema de Heine-Borel

Sea $I_1 = [c;d]$ un intervalo cerrado y acotado cubierto por una clase $\mathcal{G} = \{(a_i;b_i);\ i \in I\}$ de intervalos abiertos. Entonces $\mathcal{G}$ contiene una subclase finita que también cubre a I_1.

Demostración:

Supongo que ninguna subclase finita cubre a I_1

Biseco a I_1:

$$\left[c_1;\ \tfrac{1}{2}(c_1+d_1)\right] \quad y \quad \left[\tfrac{1}{2}(c_1+d_1);\ d_1\right]$$

Al menos uno de los dos no está cubierto por una subclase; lo llamo I_2 y lo biseco:

$$\left[c_2;\ \tfrac{1}{2}(c_2+d_2)\right] \quad y \quad \left[\tfrac{1}{2}(c_2+d_2);\ d_2\right]$$

De los cuales, al menos uno de los dos no está cubierto por una subclase; llamo I_3 a ese intervalo y lo biseco

$$\left[c_3;\ \tfrac{1}{2}(c_3+d_3)\right] \quad y \quad \left[\tfrac{1}{2}(c_3+d_3);\ d_3\right]$$

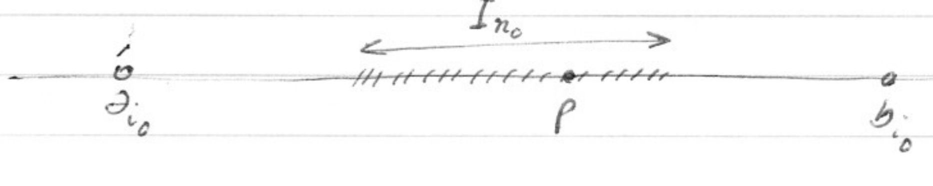
Al continuar se obtiene un encaje de intervalos

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n$$

Tales que ningún I_n está cubierto por una subclase finita y $\lim |I_n| = 0$ es la longitud del intervalo I_n

Por propiedad de encaje de intervalos $\exists p$ que pertenece a todos los intervalos; en particular $p \in I_1$. Como $\mathcal{G}$ cubre a I_1, $\exists (a_{i_0}\ b_{i_0})$ en $\mathcal{G}$ que contiene a p. Por lo tanto $a_{i_0} < p < b_{i_0}$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ |I_{n_0}| < \min(p - a_{i_0};\ b_{i_0} - p)$$



Pero I_{n_0} fue escogido de modo tal que no esté cubierto por una subclase de $\mathcal{G}$

Así la suposición de que I_1 no puede ser cubierto por una subclase de $\mathcal{G}$ no es válida

$\therefore$ El teorema es verdadero.